ゲーデルの不完全性定理の回避

２０１６年2月１５日　　　寺戸良三

ラッセルは自身のパラドックスを回避するために、
PM で型理論を公理化しました。
ラッセルの型理論は自身のパラドックスを回避しているので、
ゲーデルの不完全性定理は証明になっていないことになります。

ここで、ゲーデルの証明にならない証明に使う型理論の説明を
先に述べる。
命題 n 階として（Pn）とする。
(∃)(Pn を主張し、かつ Pn は偽である）
この命題は n+1 階である（Pn+1)
主張しているのは n 階であるから、Pn の可能な値とならない。
これで、パラドックスは排除された。
これより、上記の型理論をゲーデルの論文に適用してみる。
定義が型理論に反していることを示すだけで十分である。

第 1 不完全性定理の回避

次の定義より証明しているが、

$$n \in K \equiv \overline{Bew}[R(n);n] \qquad (1)$$

この定義が型理論に反することを示せばよい。
Bew は再帰化されていないことに注意すると、
(1) の　n∈K≡Bew[R(n);n] を n 階とすると、
(1) は　$N \in K \equiv \overline{Bew}[R(n);n]$ により、
n 階の偽であり、この定義は n+1 階であり、
n 階の可能な値とならない。
よって、ゲーデルの第 1 不完全性定理は証明にならない。
なお厳密な証明も文献の証明に使用されている（１５)、(１６）に
型理論を適用すれば、証明にならない。

第 2 不完全性定理の回避

次の定義より証明しているが、

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \rightarrow \overline{Bew_\kappa}(17\ \mathrm{Gen}\ r) \qquad (2)$$

この定義が型理論に反することを示せばよい。
Bew は再帰化されていないことに注意し、
(2) の左辺の Wid は仮定なので、固定して、
(2) の　$\mathrm{Wid}(\kappa) \rightarrow Bew_\kappa(17\ \mathrm{Gen}\ r)$ を n 階とすると、
(2) は　$\mathrm{Wid}(\kappa) \rightarrow \overline{Bew_\kappa}(17\ \mathrm{Gen}\ r)$ により、
n 階の偽であり、この定義は n+1 階であり、
n 階の可能な値とならない。
よって、ゲーデルの第 2 不完全性定理は証明にならない。

文献　ゲーデル　不完全性定理、林晋・八杉満利子訳・解説、
岩波文庫
パラドックスとラッセルのタイプ理論、土屋盛茂、
香川大学学術情報リポジトリ